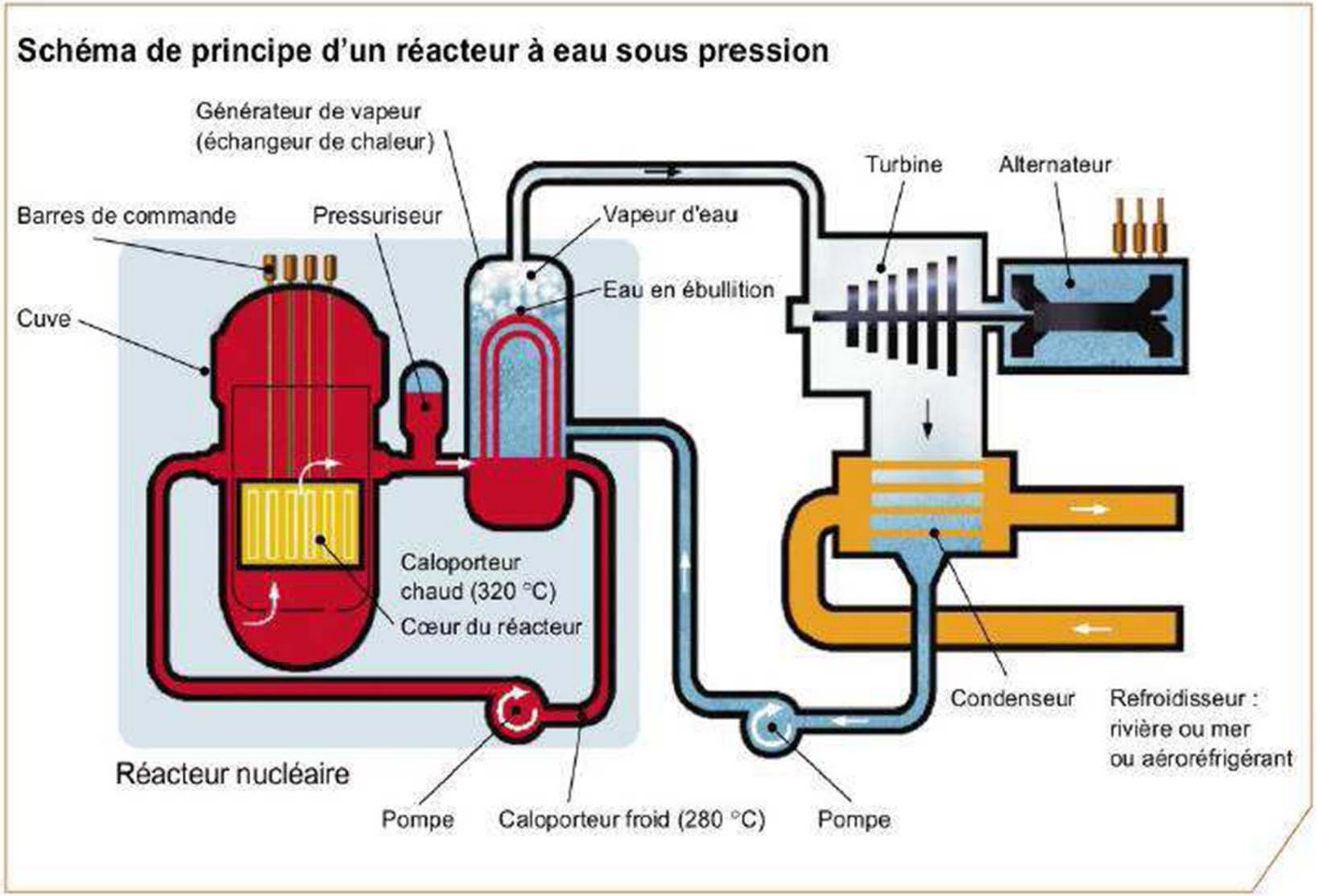
Modèles d'interface et formulations pour le contact frottant : résultats et calcul d'erreur

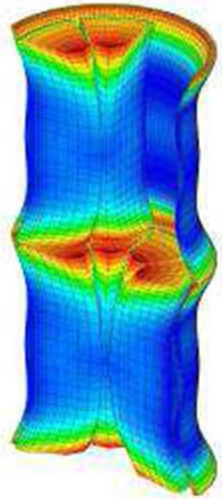
Frédéric Lebon

Aix-Marseille Université CNRS LMA

Analyses non linéaires et conception des structures

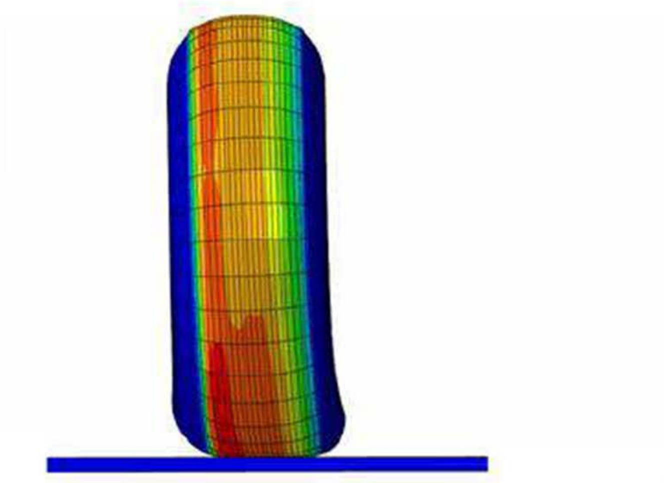
Motivations





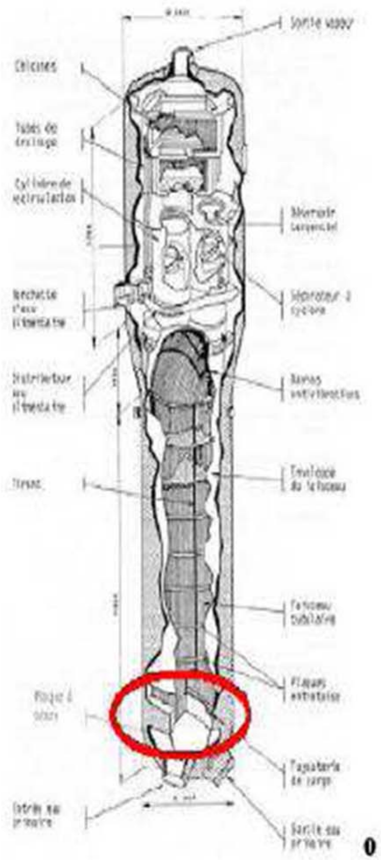
Collaboration CEA-LMA : interaction pastille-gaine

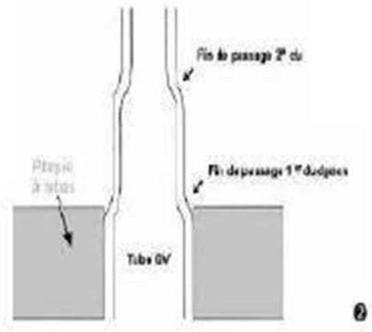
Motivations



Collaboration Airbus-LMA : modélisation du dérapage en comportement extrême

Motivations





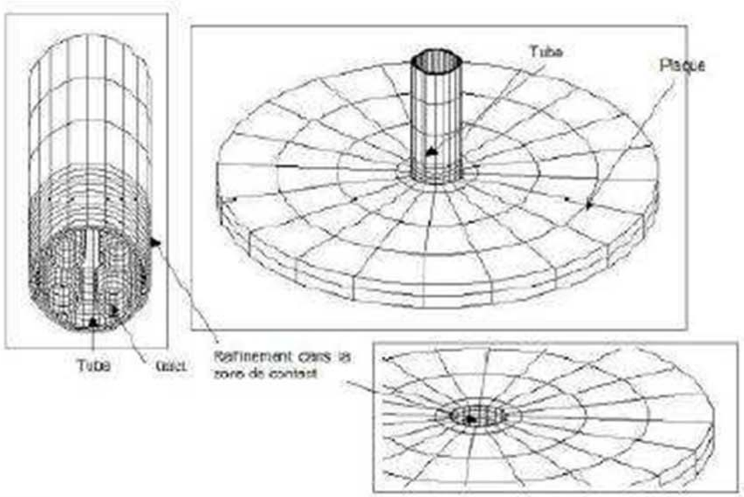


Figure 1 : ❶ Tube GV et localisation de la plaque à tubes ; ❷ Liaison tube-plaque et déformée du pied d'un tube après les deux types de dudgeonnage.

Caractéristiques de l'étude :

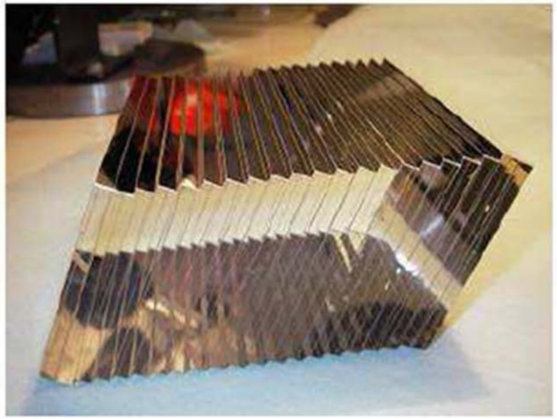
-Comportement non-linéaire : élasto-plastique

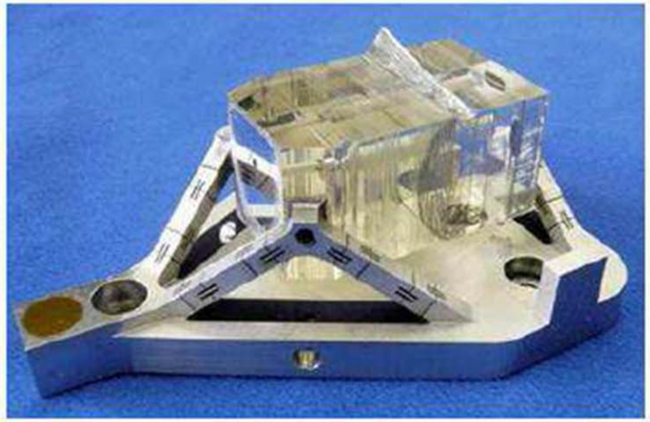
-Grandes déformations ~

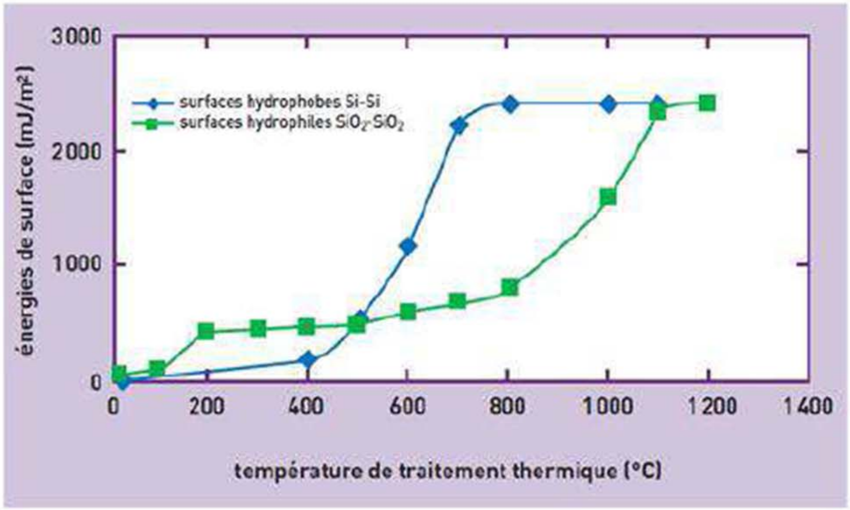
- non linéarités de contact

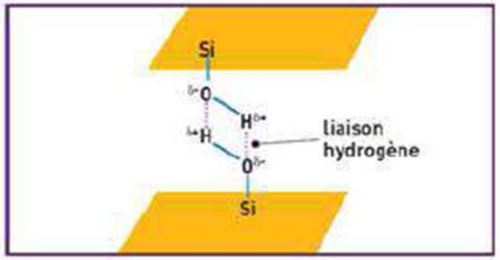
Collaboration LMA-EDF : Procédé de dudgeonnage de tubes de générateur de vapeur

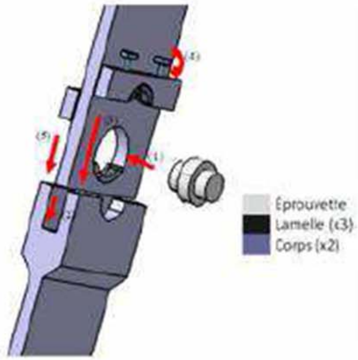
Motivations











Collaboration CNES-LAM-LMA-Winlight : adhérence moléculaire

Motivations

Modélisation des structures maçonnées

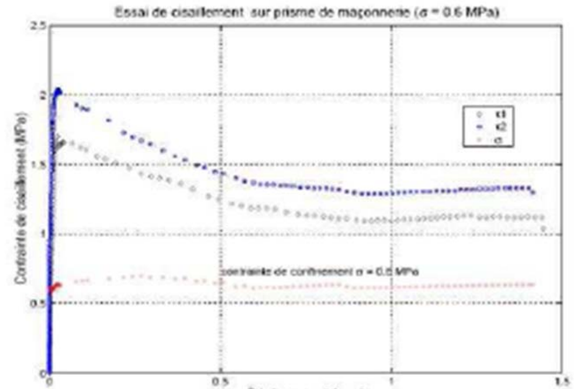
Remarques générales

- Problèmes à plusieurs échelles : du micro (nano) à la structure
- Problèmes multiphysiques : thermique, chimie, matériaux, ...
- De très nombreux modèles
- Frottement sec : loi de Coulomb
- Nombreux problèmes ouverts (et difficiles) mathématiquement

Remarques générales

Différentes classes de modèles

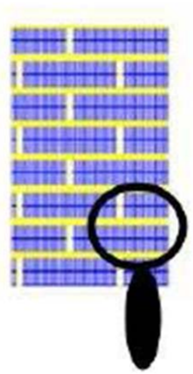
Phénoménologiques



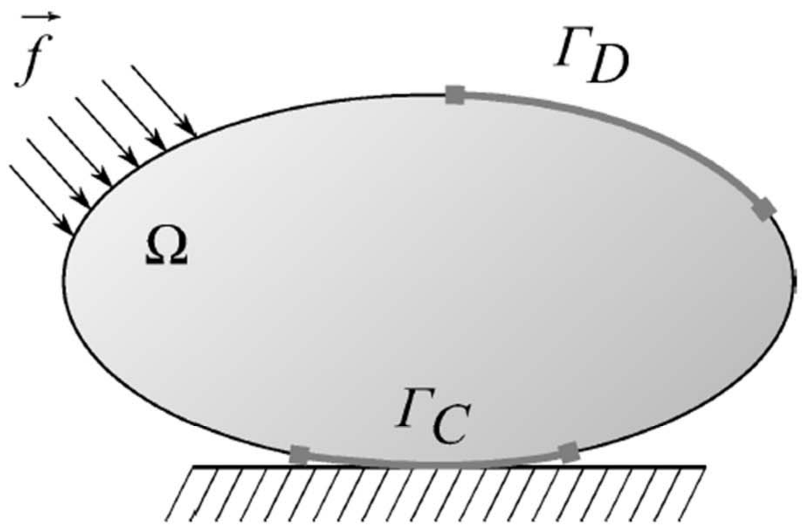
b)

FIG. 4.10 – a) Courbe $\tau - \delta$ pour $\sigma = 0,4\ MPa$. b) Courbe $\tau - \delta$ pour $\sigma = 0,6\ MPa$.

Déductifs (micro-macro)



Eléments du modèle



Première Hypothèse

Pour simplifier, Contact Solide Déformable/Solide Rigide

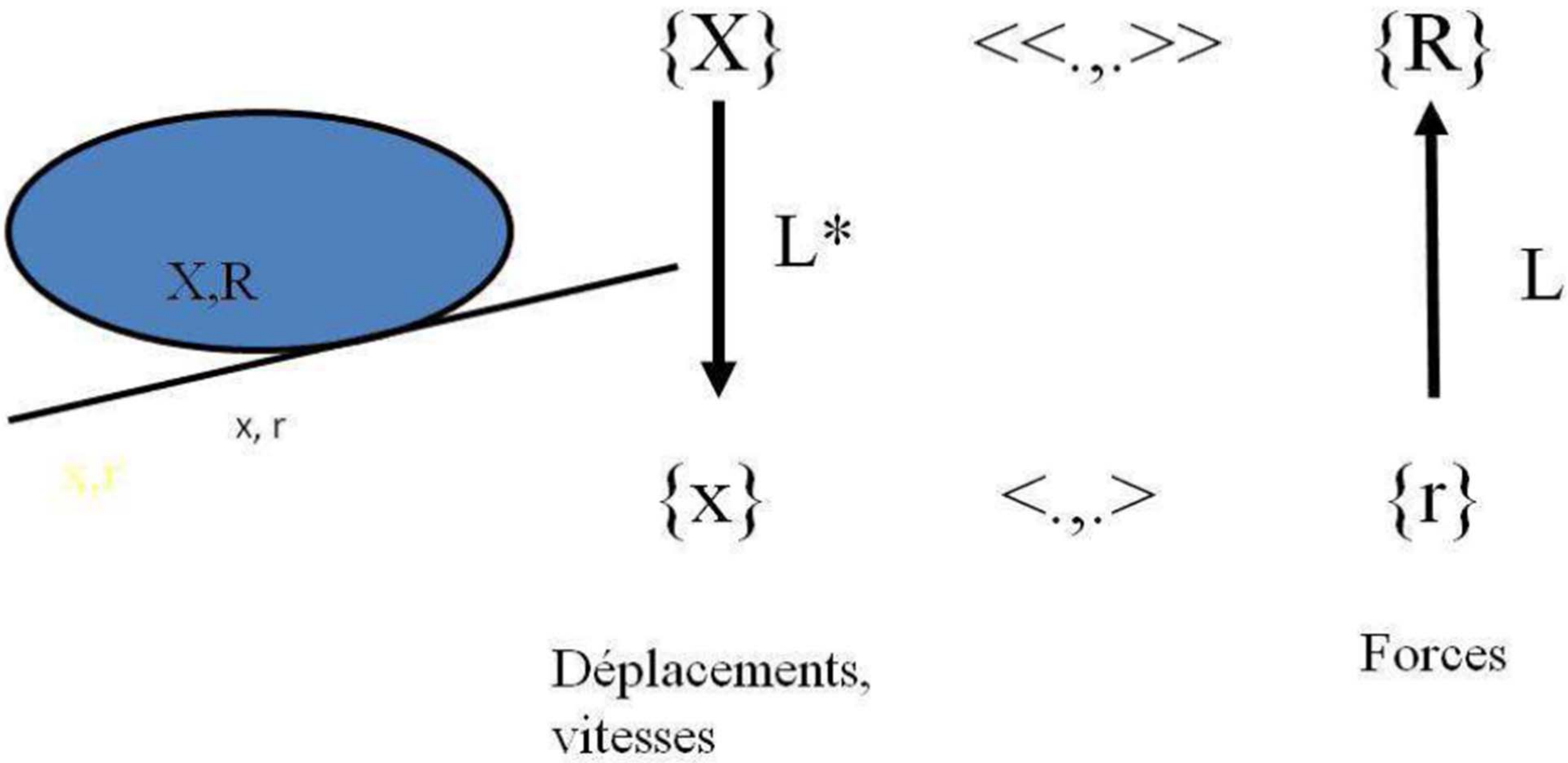
Deuxième Hypothèse

Pour simplifier, élasticité linéarisée, HPP, statique.

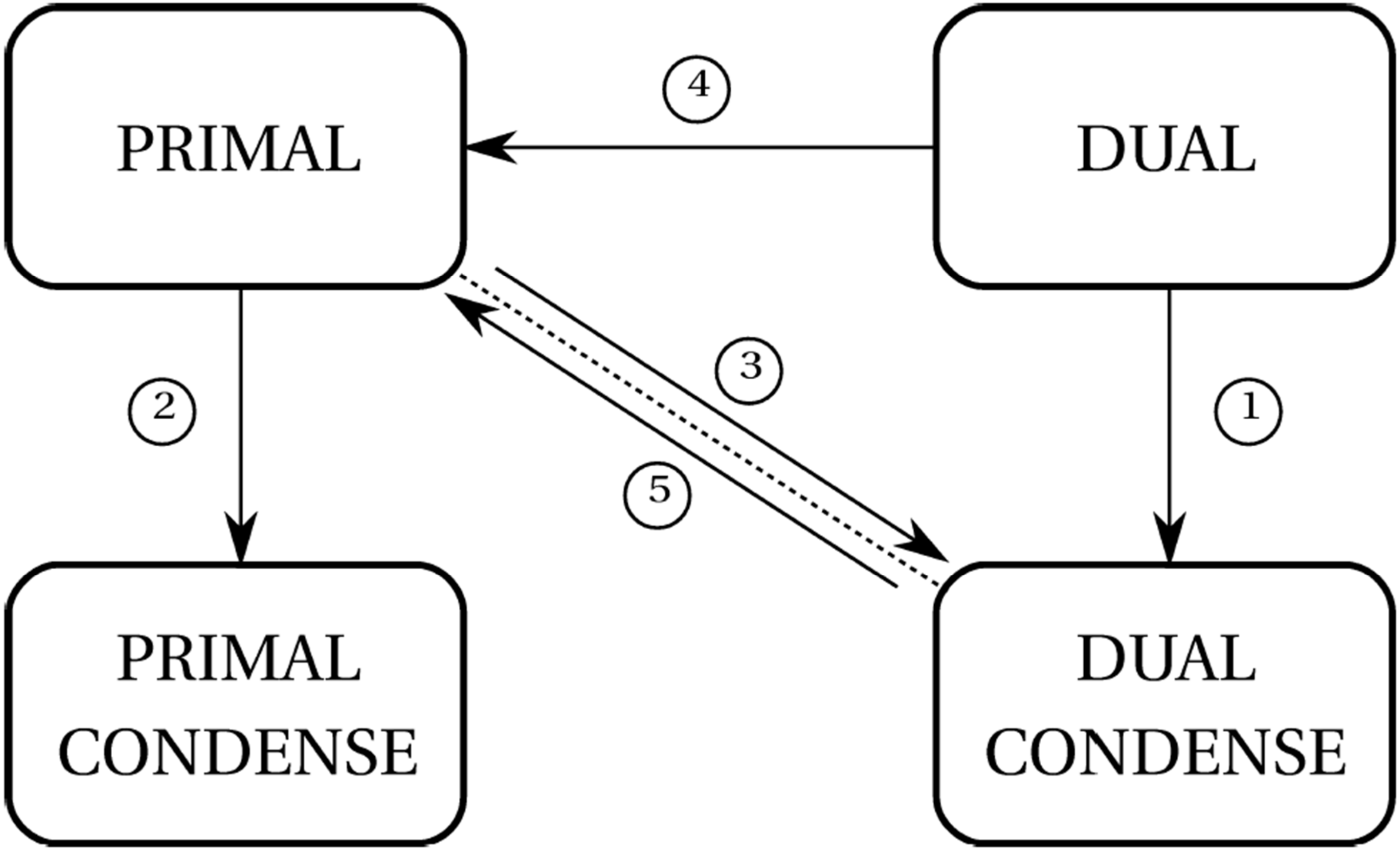
Troisième Hypothèse

Frottement sec

Choix des variables



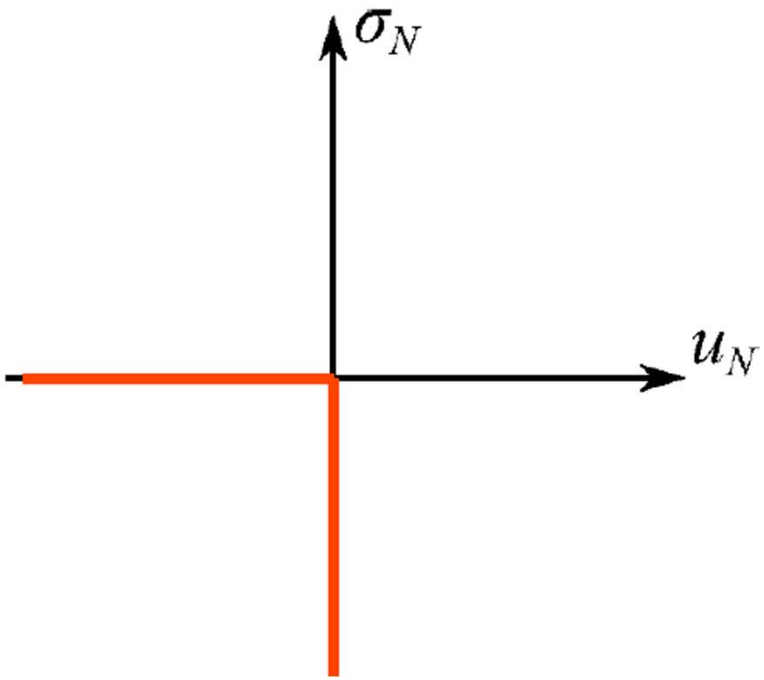
Choix des variables

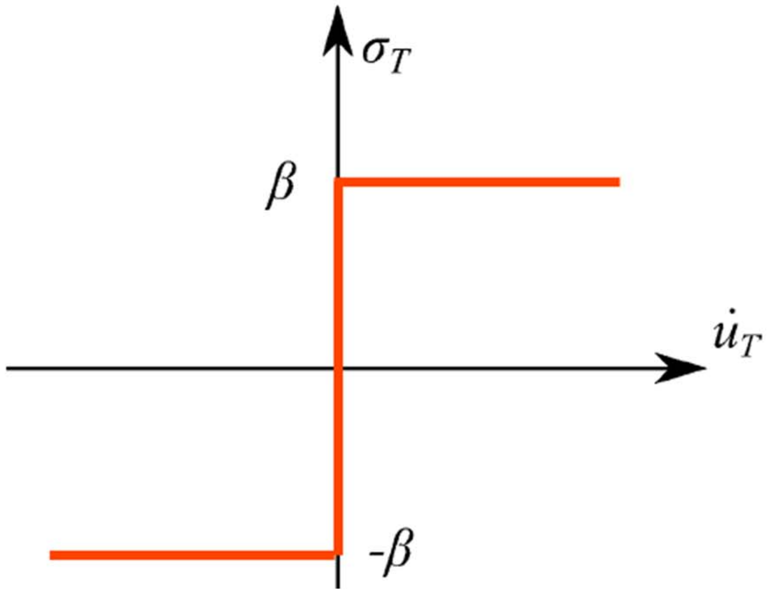


Contact unilatéral et frottement

$$\begin{cases} u_N \leq 0 \\ \sigma_N \leq 0 & \text{sur } \Gamma_C \\ u_N \sigma_N = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ||\sigma_T|| \leq -\mu\sigma_N \\ \text{Si } ||\sigma_T|| < -\mu\sigma_N \text{ alors } \dot{u_T} = 0 \\ \text{Si } ||\sigma_T|| = -\mu\sigma_N \text{ alors } \dot{u_T} = \\ \quad -\lambda\sigma_T \text{ avec } \lambda \in R^+ \end{cases}$$





Formulation en déplacements

Problème ($\mathbf{P_d}$). Trouver un champ de déplacements $u : \Omega \to H$ tel que :

$$\begin{cases} u \in K = \{u \in V ; u_N \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C\} \\ a(u, v-u) + j(u,v) - j(u,u) \geq L(v-u) \quad \forall v \in K \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a(u, v-u) = \int_\Omega A\varepsilon(u)\epsilon(v-u)d\Omega \\ L(v-u) = \int_{\Gamma_F} f(v-u)d\Gamma + \int_\Omega F(v-u)d\Omega \\ j(v,w) = \int_{\Gamma_C} \mu|\sigma_N(v)||w_T|d\Gamma \end{cases}$$

Formulation mixte (ici pour 2 solides)

Fonctionnelle Mixte

$$E(v^i(x^i,t),\lambda_n^*,\Lambda^*) = \left(\left(\sum_{i=1,2} E^i(v^i(x^i,t))\right) + E_c(v^i(x^i,t),\lambda_{\mathbf{n}}^*,\Lambda^*)\right) \tag{1}$$

Problème Point-selle

Soit à trouver $(u^1,u^2,\lambda_n,\Lambda)^T \in H(\Omega_1)\times H(\Omega_2)\times H'(\Gamma_c)\times B(\Gamma_c)$ tel que :

$$(u^1,u^2,\lambda_n,\Lambda) = arg \min_{(v^1,v^2)} \; arg \max_{(\lambda_{\mathbf{n}}^*,\Lambda^*)} \left(E(v^i(x^i,t),\lambda_n^*,\Lambda^*)\right) \tag{2}$$

Formulation en contraintes

Problème $(\mathbf{P_s})$. Trouver un champ de contraintes $\sigma : \Omega \to H$ tel que

$$\begin{cases} \sigma \in \Sigma(\sigma) = \{\sigma \in H_{F,f} ;\, \sigma_N \leq 0\,,\, |\sigma_T| \leq -\mu\tau_N \text{ sur } \Gamma_C\} \\ b(\sigma, \tau - \sigma) \geq l(\tau - \sigma) \quad \forall \tau \in \Sigma(\sigma) \end{cases}$$

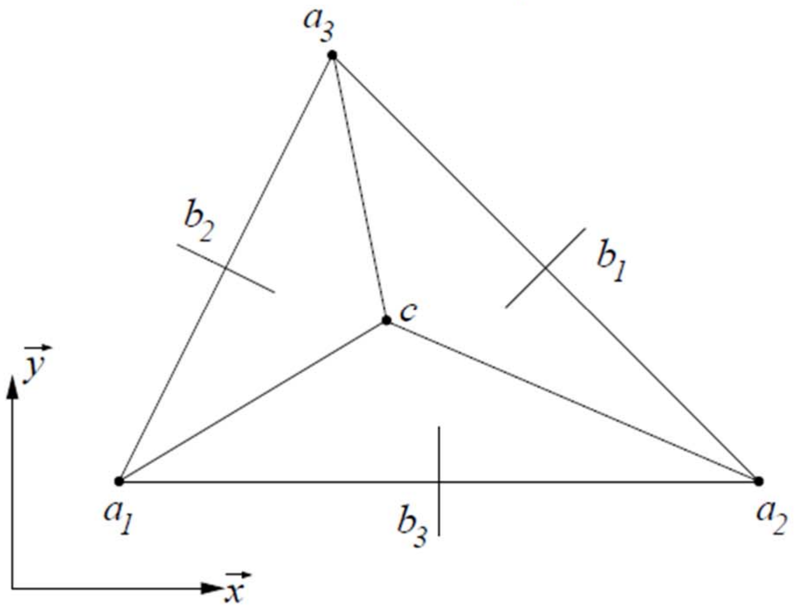
avec

$$\begin{cases} b(\sigma, \tau) = \int_\Omega A^{-1}\sigma \cdot \tau dx \\ \\ l(\tau) = \int_{\Gamma_D} u_0 \tau \cdot n ds \end{cases}$$

$$H_{F,f} = \{\sigma \in H ;\, \sigma_{ij,j} + F_i = 0 \text{ dans } \Omega\,,\, \sigma_{ij} n_j = f_i \text{ sur } \Gamma_F\}$$

Résolution numérique duale 1

Difficulté : vérifier les conditions d'équilibre (difficile en 3D)
En 2D : Potentiel d'Airy $\sigma_{xx} = \phi_{,yy}, \sigma_{yy} = \phi_{,xx}, \sigma_{xy} = -\phi_{,xy}$
Imposer les conditions aux limites
Elements finis "Equilibre" : Exemple HCT (Hsier, Clough et Tocher)



Degrés de liberté :
$[\Phi(a_i), \frac{\partial \Phi(a_i)}{\partial x}, \frac{\partial \Phi(a_i)}{\partial y}, \frac{\partial \Phi(b_i)}{\partial n}]$
Elément composite P3 par sous triangle

Résolution numérique duale 2

$$\pi^* = \frac{1}{2}[\phi]^T[S][\phi] - [\phi]^T[C]^T[q] + [\lambda]([C_F][\phi] - [f]) + [\lambda']([C_C][\phi] - [f_C])$$

$$\begin{bmatrix} S & {C_F}^T & {C_C}^T & 0 \\ C_F & 0 & 0 & 0 \\ C_C & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ \lambda \\ \lambda' \\ f_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T q \\ f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_C \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uzawa ou Condensation

$$[D][f_C] = [G] + [G_C]$$

$$[\delta f_C - f_C][D][f_C] \geq [G][\delta f_C - f_C] \ \forall \delta f_C$$

Résolution numérique duale 3

Condensation "brute" par la méthode SYMMLQ
Condensation en trois étapes (directe ou itérative pour S)

Préconditionneur factorisation incomplète de Cholesky

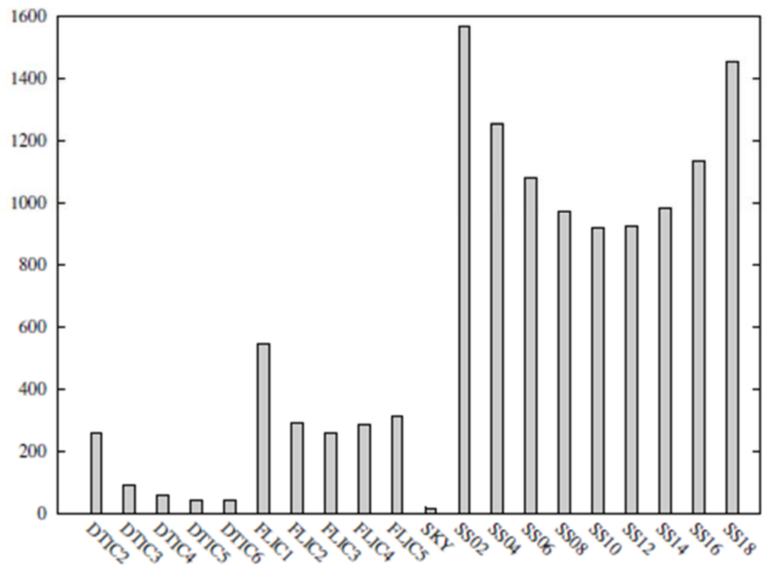
- Stratégie "drop tolérance"
- Stratégie "filling level"

Préconditionneur SSOR

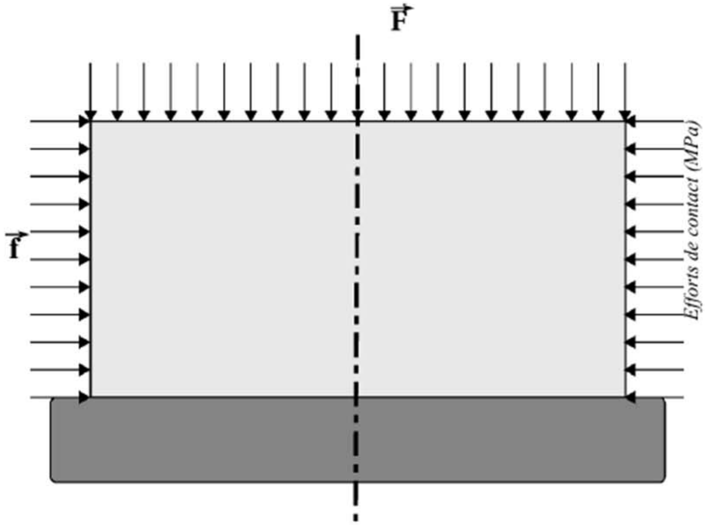
- Relaxation avec projection Deux types de projection (contact, frottement)
- Relaxation par blocs : méthode D-PANA (Bisegna-Lebon-Maceri) Succession de problèmes : contact seul, frottement seul
  Preuve de convergence pour μ petit

Résolution numérique duale 4

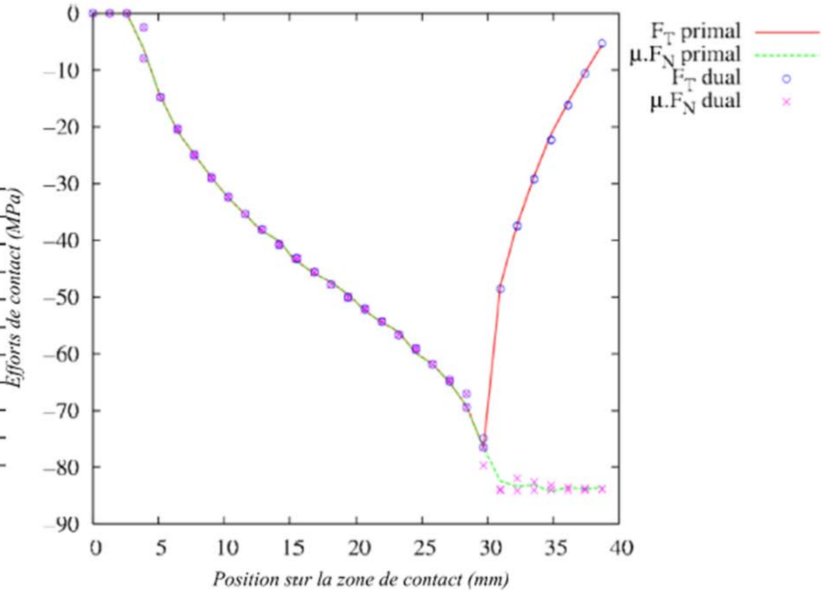
- Deux types de méthodes : Uzawa ou condensation
- Stratégie de stockage des matrices
- Parallélisation
- Comparaison des performances des méthodes (temps calcul et mémoire)



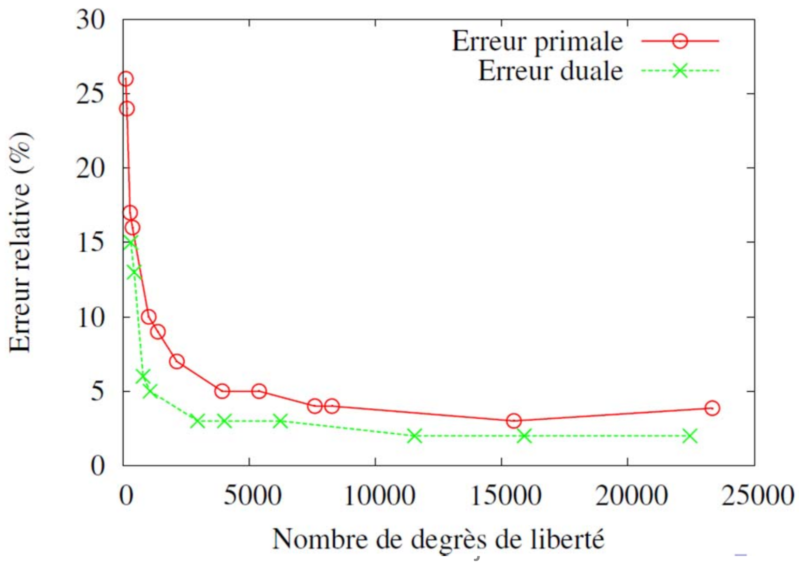
Validation



F
f



Efforts de contact (MPa)
Position sur la zone de contact (mm)
F_T primal
$\mu.F_N$ primal
F_T dual
$\mu.F_N$ dual



Erreur relative (%)
Nombre de degrès de liberté
Erreur primale
Erreur duale

Qualité des solutions

On pose

$$\Delta u = u_h - u, \quad \Delta\sigma = \sigma_h - \sigma$$

$$e_r = \left[||\Delta u||^2_\Omega + ||\Delta\sigma||^2_\Omega \right]^{\frac{1}{2}}$$

avec $||\Delta u||^2_\Omega = a(\Delta u, \Delta u)$ et $||\Delta\sigma||^2_\Omega = b(\Delta\sigma, \Delta\sigma)$.

Erreur a posteriori

$$\frac{1}{2}e_r^2 = E_p^*(u_h) + E_c^*(\sigma_h) - \Big(\int_{\Gamma_C}(\sigma n)\Delta u \; d\Gamma + \int_{\Gamma_C} u\Delta\sigma n \; d\Gamma + \int_{\Gamma_C}(\sigma n)u \; d\Gamma\Big)$$

Qualité des solutions

Erreur a posteriori : sans frottement

$$\frac{1}{2}e_r^2 \leq E_p^*(u_h) + E_c^*(\sigma_h)$$

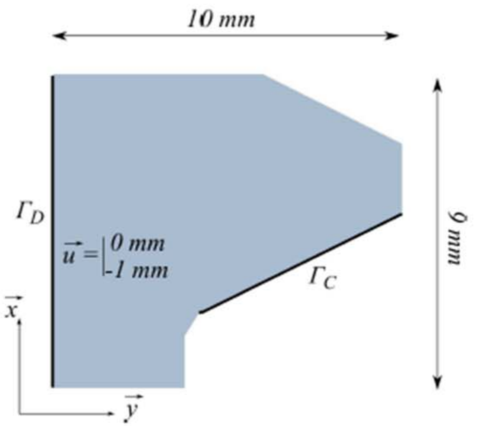
Erreur a posteriori : avec frottement

$$\frac{1}{2}e_r^2 \leq E_p^*(u_h) + E_c^*(\sigma_h) + \int_{\Gamma_C} (\sigma_T u_{hT} + u_T \sigma_{hT} - \sigma_T u_T)\, d\Gamma$$

Erreur a posteriori : estimateur

$$\int_{\Gamma_C} (I(u_h) + I_\Sigma(\sigma_h) + \mu|\sigma_{hN}||u_{hT}| + \sigma_{hT} u_{hT} + \sigma_{hN} u_{hN})\, d\Gamma$$

Qualité des solutions



Pas de solution analytique
Solution de référence : maillage très raffiné

h	$\|\|\tilde{\Delta} u\|\|_{ref}$	$\|\|\tilde{\Delta} \sigma\|\|_{ref}$	$\tilde{e}_{ref}$	$\tilde{e}_{estim}$	nodes	elements
2	44.07	22.91	49.67	49.79	28	38
1	37.82	20.74	43.14	43.28	72	112
0.5	25.36	12.78	28.4	28.43	267	469
0.2	15.88	7.55	17.58	17.52	2025	3069
0.1	11.63	5.55	12.89	12.81	6410	12483
0.08	9.86	5.18	11.14	11.03	10186	19949

Adaptation de maillage

$$e_e = \Big(\int_{\Omega_e} (\sigma_h - \mathbb{K}\varepsilon(u_h))^T \mathbb{S}(\sigma_h - \mathbb{K}\varepsilon(u_h)) d\Omega_e \Big)^{\frac{1}{2}} + e_{ec}$$

$$e_{ec} = \sum_{j=1}^{N_{\Gamma_e}} 2 I_{ec} \int_{\Gamma_{ej}} (I(u_h) + I_\Sigma(\sigma_h) + \mu|\sigma_{hN}||u_{hT}| + \sigma_{hT} u_{hT} + \sigma_{hN} u_{hN})$$

$$\text{avec } I_{ec} = \begin{cases} 1 \text{ si } \Gamma_{ej} \in \Gamma_C \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$e = \Big(\sum_{e=1}^{N} (e_e^2 + e_{ec}) \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Estimation a priori $e = O(h_e^{p_e})$

Adaptation de maillage

Elasticité primal : $p_e = 1$
Elasticité dual : $p_e = 1$
Contact frottant primal (Coulomb): $p_e = 2/3$ (Capatina-Cocou)
Contact frottant dual (Tresca): $p_e = 0.5$ (Capatina-Lebon)

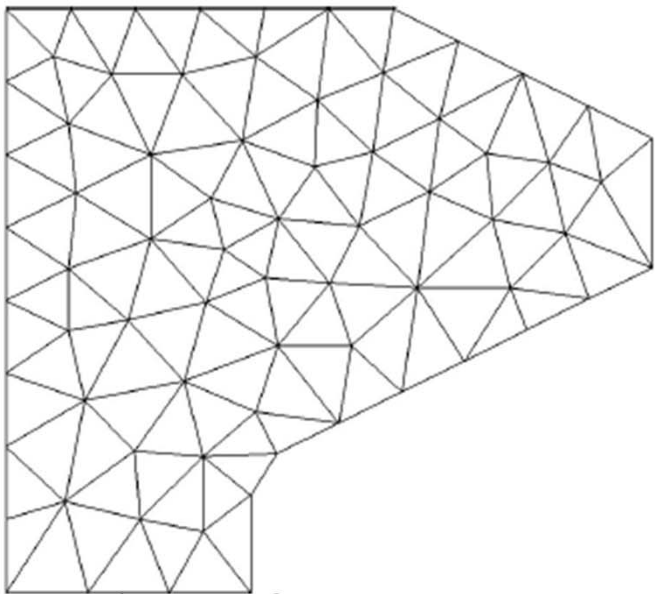
Erreur locale e_e,
Erreur locale cible e_e^* $\frac{e_e^*}{e_e} = (\frac{h_e^*}{h_e})^{p_e} = (r_e)^{p_e}$ (r_e coefficient de réduction locale)
Erreur globale cible $e_0^2 = \sum_E (e_e^*)^2$,
Ce qui s'écrit $e_0^2 = \sum_E e_e^2 r_e^{2p_e}$

On veut atteindre l'erreur globale cible avec un nombre d'éléments minimum
Ce qui revient à minimiser $J = \sum_E \frac{1}{r_e^2} + \lambda[\sum_E e_e^2 r_e^{2p_e} - e_0^2]$
avec λ multiplicateur de Lagrange

Adaptation de maillage

Etapes	No. d'éléments	No. de noeuds	Erreur (%)
Maillage Initial	112	72	43.25
1	1908	1016	13.80
2	2316	1230	8.35
3	2263	1221	7.24
4	2208	1180	7.51
5	2199	1177	7.25

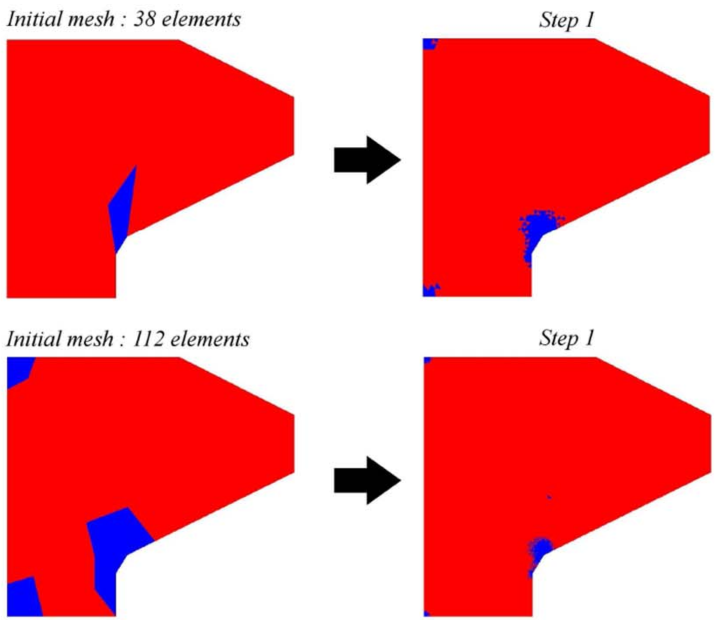
Cible 6,91%
Pe = 1



Adaptation de maillage

Cible 6.91%, $p_e = 1$ (volume) ou $p_e = 0.5$ (bord de contact)

Etapes	No. d'éléments	No. de noeuds	Erreur (%)
Maillage Initial	112	72	43.25
1	10076	5184	8.48
2	2919	1544	6.93
3	2549	2549	6.67



Conclusions et perspectives